PRÆLECTIONES TRES IN ARCHIGYMNASIO BONONIENSI LECTÆ PRID. KAL...

Giovanni Battista Guglielmini

PRÆLECTIONES TRES

IN ARCHIGYMNASIO BONONIENSI LECTÆ

PRID. KAL. MART., KAL. IPS., ET POSTRID.

ELAPSI ANNI MDCCCXIV.

QUAS

EXCELSO VIRO JULIO COMITI STRASSOLDO

IMPERATORIS FRANCISCI I. AUGUSTI

CUBICULARIO CONSILIARIOQUE AULICO

ET

PROVINCIARUM ITALICARUM TRIUM

ADHUC ADJUDICANDARUM

PRÆFECTO

IOANNES BAPT. GUGLIELMINI

D. D.

EXCELSO VIRO JULIO COMITI STRASSOLDO

IOANNES BAPT. GUGLIELMINI

SALUTEM ATQUE FELICITATEM.

Opusculum hoc, ut in Germaniam, cujus judicium tanti facio, latius permearet, pateretque, latino sermone confeceram: sed non satis id sibi fiebat tam longe proficiscenti, Patronumque postulat, cujus ope fulciatur. Te igitur, quem semper desiderandum Studiorum quoque nostrorum habuimus præsidium et decus, confidenter adit, potens et felix Patrocinium tuum impetraturum. Cura ut valeas.

Bononiae XI. Kal. Febr. An. MDCCCXV.

836

LECTIO I.

1.° Interim dum ea in lucem edantur, quæ de *Numericarum*, *Symbolicarumque Æquationum* resolutione vero sat proxima, Sodalibus Instituti Bononiæ legi post. Non. Iul. elapsi anni 1813; novam hanc Methodum Scholaribus aperire præstat, quippe quæ rem omnem in unum contrahit, et clariorem reddit, brevioremque.

2.° Sit solvenda symbolica æquatio $A = x^3 + a\,x - \varphi = 0$. Fingatur $x = \alpha + \beta\,\varphi + \gamma\,\varphi^2 + \delta\,\varphi^3 + \varepsilon\,\varphi^4 + \text{ec.}$, fietquo

$$A = \left\{\begin{array}{llllll} a\alpha & + a\beta\varphi & + a\gamma\varphi^2 & + a\delta\varphi^3 & + a\varepsilon\varphi^4 & + \text{ec.} \\ \alpha^3 & + 3\alpha^2\beta\varphi & + 3\alpha\beta^2\varphi^2 & + \beta^3\varphi^3 & + 3\beta^2\gamma\varphi^4 & + \text{ec.} \\ & - \varphi & + 3\alpha^2\gamma\varphi^2 & + 6\alpha\beta\gamma\varphi^3 & + 3\alpha\gamma^2\varphi^4 & + \text{ec.} \\ & & & + 3\alpha^2\delta\varphi^3 & + 6\alpha\beta\delta\varphi^4 & + \text{ec.} \\ & & & & + 3\alpha^2\varepsilon\varphi^4 & + \text{ec.} \\ & & & & & + \text{ec.} \end{array}\right\} = 0;$$

quare, pro indeterminatorum coefficientium α, β, γ, ec, ingenio, fiat oportet $\alpha^3 + a\,\alpha = 0$ (et ita porro), idest $\alpha = 0$, et $\alpha^2 + a = 0$, nempe $\alpha = \sqrt{-a}$, et $\alpha = -\sqrt{-a}$.

3.° Totidem ergo, et semper, *Radices* α obtinebuntur, quotus est gradus æquationis A, neque enim radix $\alpha = 0$ est negligenda; nisi quod,

si penultimus terminus defuerit (est hic loci $a\,x$), tunc radices $\alpha = 0$ haberentur plus una: hoc in casu radices $\alpha = 0$ forent intimius discutiendæ (parag. 6.°, et 18.°); vel foret potius proposita æquatio in aliam transformanda termino penultimo gaudentem, ut semper fecisse præstabit. Quot porro modis terminus quivis de quavis æquatione expungatur, vel regrediatur in ipsam, visum est in anteactis Lectionibus: illud tamen, ne de memoria vestra labatur, repetam; æquationis nempe gradus cujusvis terminos secundum et penultimum (par. 18.°) excludi posse per primi gradus æquationem; terminos vero tertium et antipenultimum per æquationem removeri gradus secundi; et sic deinceps.

4.° Par radicem $\alpha = 0$, æquationibus gradua tantum primi juvantibus, secernuntur coefficientes indeterminati cæteri $\beta = \frac{1}{a}, \gamma = 0, \delta = \frac{-1}{a^4}$, $\varepsilon = 0$, ec.; et æquationis proinde A radix altera prodibit (par. 2.ª) $x = \frac{\varphi}{a} - \frac{\varphi^3}{a^4} + \frac{3\,\varphi^5}{a^7} - \text{ec.} = S.$

Per cæteras vero radices $\alpha = \pm\sqrt{-a}$, æquationibus semper primi gradus intercedentibus, elicientur $\beta = \frac{-1}{2.a}, \gamma = \frac{\pm 3\sqrt{-a}}{2^3.a^3}, \delta = \frac{1}{2.a^4}, \varepsilon =$

$\frac{\pm 105 \sqrt{-a}}{2^7 . a^6}$, ec.; proindeque æquationis *A* radices cæteræ patefiunt $x = \frac{-\varphi}{2a} \frac{+\varphi^3}{2 . a^4}$ — ec. $\pm \sqrt{-a}$

$$\left(1 + \frac{5\varphi^2}{2^3 . a^3} - \frac{105\varphi^4}{2^7 . a^8} + \text{ec}\right) = S' + S'' \sqrt{-a}.$$

Æquationis igitur *A* resolutio vero sat proxima eo pervenit, ut serierum trium S, S', S'' valor vero sat proxime admoveatur, vel potius reperiatur ad unguem per serierum ipsarum *Summam totalem;* id quod in præsenti exemplo licet, et fit, ut anteactæ Lectiones vos docuerunt. Hoc quotiescumque contingat, æquationis resolutio exacte fit; id vero de quinti gradus, vel ulterioris, generalibus æquationibus frustra desideratur, istarum enim radices neque algebraicæ sunt, neque de iis *transcendentium Functionum* familiis, quas Mathesis adoptavit hactenus.

5.° Si æquatio proposita fuerit de specie numericarum, dicatur ejus terminus constans æqualis φ, et æquatio calculis, ut supra, subjiciatur; et hoc pro numericis notasse sufficiat.

6.° Quum serierum S, S', S'', ec. valor ad radicum valorem respiciat, non ad æquationis solutionem stricte sumptam; patet sane *Nume-*

ricarum Symbolicarumque Æquationum Resolutionem peractam jam esse; æquationis enim generalis $x^m + a x^{m-1} \ldots\ldots\ldots + q x + \phi = 0$ resolutio pendet a resolutione æquationis $\alpha^m + a \alpha^{m-1} + b \alpha^{m-2} \ldots\ldots + q \alpha = 0$ labore nullo obtinendæ, cujus una tantum, sed semper, radix est $\alpha = 0$, cæteræ vero pendent abs inferioris gradus æquatione $\alpha^{m-1} + a\alpha^{m-2} + b\alpha^{m-3} \ldots + q = 0$; id quod jam diu desiderabatur.

7.° Verum si æquatio proposita gradum excedat quintum, calculis plerumque obnoxia fit ferme non ferendis, quibusque abstinuisse præstabat (par. 21.°). Quæ itaque sequuntur adjicio, non resolutioni huic instituturus, sed acturus potius de Serierum *Transformatione*, ipsarumque *Summa totali*; visurus nempe quando convergentia seriei summa totalis valorem adipiscatur finitum, vel finitum rejiciat et valorem præseferat infinitum: finitus cuim convergentis seriei valor, $x = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ ec., cujus termini singuli reales sunt, radicem offert x realem; valor vero infinitus radicem præbet imaginariam; id quod antelectarum prælectionum res fuit sat clara.

Methodum expositam attigisse videtur illustris Vir Andreas Mozzonius in suis Notis ad Bossutii Mathesim (Corso di Matematica del

Bossut, Venezia 1808 Vol. Sec. pag. 245, ec) *ut, Lectione hac habita, me monuit Mauritius Brighentius, juvenis mathematica Laurea, elapso anno, Bononiae donatus, et magno cum plausu; quem, benevolentiae causa, hoc quoque anno, frequentem habeo auditorem. Sed inter me et Mozzonium (vel potius inter me et Bossutium* Encyclopedie Method. Mathematiques. Art. Approximation) *discrimen interjacet multum; satisque sit dixisse, quod sextum ipse paragraphum meum non assequitur; totus imo videtur esse ut ab ipso declinet.*

8.° Serierum S, S', S'' (par. 4.°) convergentia pendet praecipue abs penultimi termini nunquam desiderandi (par. 5.°) coefficiente (*est a* (par. 2.°) in aequationa A), qui nempe coefficientibus caeteris major habeatur, non excepto termino constanti φ; id quod cuique inspicianti vel leviter series S, S, SS''' (par. 4.°) patebit. Id porro (in tertii gradus aequationibus) obtinetur per suppositum $x = z \pm \sqrt[3]{\varphi}$; et demonstratio innititur potissimum neutoniano binomio, puta $(1+27)^{\frac{1}{3}}$ in seriem evolutio, respectu binomii ejusdem valoris $(3^{3}+1)^{\frac{1}{3}}$, ut vos anteactae Lectiones docuerunt: quandoque vero praedictum suppositum non sufficit:

iuvat ergo rem aliunde petitam latius explorare, quod exemplis pro more meo conficiam.

9.° Quoties de symbolicarum serierum *convergentia* vel *divergentia* sermo sit, totius concedendum venit, propositæ symbolicæ æquationis coefficientes a, b, ec., certis contineri limitibus, puta $a > \frac{99b}{100} < b$, quod ferme est idem, ac si æquationem symbolicam transferas in numericam: quamobrem exemplis (ad brevitatem) utar numericis, uno porro excepto, quod symbolicas attingat, ne istis methodus mea prohiberi videatur.

Exemplum I.

10.° Æquatio $O = x^4 + 8x^2 + 16 = 0$, quam *Originalem* appello, sit in aliam traducenda, cujus coefficientes præbeant quæsitas radices per series convergentes: transformata nempe gaudere debet termino penultimo, et hujus coefficiens coefficientibus cæteris prævaleat necesse est (par. 8.°). *Originalis O* exhibet *Derivatam* primam $D' = 4x^3 + 16x$ (sic diximus in præhabitis Lectionibus *Differentiale* primum *Functionis O* divisum per dx): *Derivatam* secundam $D'' = 6x^2 + 8$ (videlicet *Functionis O Differentiale* secundum divisum per $1.2dx^2$):

Derivatam tertiam $D''' = 4x$ (idest *Differentiale* tertium divisum per $1 . 2 . 3 dx^3$); denique *Derivatam* quartam $D^{IV} = 1$. (nempe ec.); et sic deinceps; nisi quod *Derivatæ* (ut hic loci) fiunt tandem $D^V = 0$, $D^{VI} = 0$, ec. Licebit autem semper realem valorem et positivum reperire (par. 14.°), qui pro x suffectus *Derivatas* singulas, quamquam negativis terminis scatentes, redigat in positivum valorem, cogatque fieri simul $D' > D'' > D''' >$ ec.: hoc in exemplo sufficit $x = 1$, obtinetur enim $D' = 20 > D'' = 14 > D''' = 4 > D^{IV} = 1$. Fit porro $O = 25 > D' = 20$ contra ac desiderabatur (par. 8.°); verum si nunc dicatur $x = z + 1$ (est 1 valor modo repertus $x = 1$), æquatio O abibit in $O' = D^{IV} z^4 + D''' z^3 + D'' z^2 + D' z + O = z^4 + 4 z^3 + 14 z^2 + 20 z + 25 = 0$, cujus nempe coefficientes 1, 4, 14, 20, 25, reperti jam fuere interim dum cogebamus *Derivatas* in $D' > D'' >$ ec., quod fuit utilissimum alterius Lectionis argumentum. Postulabatur vero ut haberetur etiam $D' > O$, idest $20 > 25$, quod accidit minime (contigisset porro de æquatione $B = x^4 - 7 x^3 + 13 x^2 - 3 x + 20 = 0$): verum dicatur nunc $z = \frac{y}{\mu}$, et æquatio O' abibit in $O'' = y^4 + 4 \mu y^3 + 14 \mu^2 y^2 + 20 \mu^3 y + 25 \mu^4 = 0$, in qua ut coefficientes

844

maneant $20\mu^3 > 14\mu^2 > 4\mu > 1$, sufficit si fuerit $20\mu^3 > 14\mu^2$, nempe $\mu > \frac{7}{10}$: ut autem obtineatur simul $20\mu^3 > 25\mu^4$, oportet ut sit $\mu < \frac{8}{10}$: sit ergo necesse est $\mu > \frac{7}{10} < \frac{8}{10}$, id quod per intermedium valorem, puta $\frac{3}{4} = \mu$, obtineatur, quo suffecto, æquatio prodibit ut petebatur (par. 8°).

11.° Verum, qui fieri potest ut æquatio O, cujus singulæ radices sunt imaginariæ, abest in O' (vel quandoque etiam in O', ut contigisset de æquationa B (par. 10.°), cujus item radices singulæ imaginariæ sunt), quæ offerat seriem saltem unam (nempe primam per $x = 0$, ut patet ex paragraphis 4.°, et 14.°) realem et convergentem simul? Vidimus nempe (dicet fortasse quis vestrum) radicem imaginariam quamvis (cogendam semper in $M + N\sqrt{-1}$ ut demonstravi) traduci utique posse in seriem realem, sed cujus valor infinitus sit; veluti $x = (1-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2} \frac{-1 \cdot 3}{2 \cdot 3} \frac{- \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} - ec. = -\infty$, quæ quantitas, impossibilis est, idest semper imaginaria: sed ne, quæso, illud de memoria vestra labatur, realium et convergentium etiam serierum valorem

fieri quandoque infinitum; quin imo, Problemate de industris sumpto, cujus radices per solam ratiocinationem patebant impossibiles, idest imaginariæ, incidimus in æquationem $x = \frac{L-m}{L n}$, quæ, si dicatur (ut ex Problemate licat) $m = o$, abit in $x = \frac{L-m}{L n} = \frac{2L-m}{2 L n} = \frac{2L\sqrt{-m}}{L n} = \frac{2L\overline{o+\sqrt{m}\sqrt{-1}}}{L n} = 2L\sqrt{o^2+m} + 2.\,Arc.\,tang.\frac{\sqrt{m}}{o}\sqrt{-1} = \frac{Lm+180^o\sqrt{-1}}{L n}$, quæ radix imaginaria est etiam pro $m = o$: sed si dicatur ab initio $m = \pm o$, habebitur $x = \frac{L\pm o}{Ln} = \frac{L\pm(1-1)}{L n}$, quæ æquationis radix, pro signo $-$, idest pro $L-(1-1)$ reperta est modo imaginaria; pro signo vero $+$, traducitur in $x = \frac{L(1-2)}{L n} = \frac{-1}{L n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ ec.) = \frac{-\infty}{L n} = -\infty$, fit nempe realis sed infinita, idest impossibilis, est nempe iterum vel adhuc imaginaria; quæ singula in præhabitis Lectionibus tradita sunt.

Iuvat autem nunc, et decet, sermonem prope retorquere. Quum nempe functio quævis imaginaria compelli semper queat in $M+N\sqrt{-1} = N\left(\frac{M}{N}+(1-2)^{\frac{1}{2}}\right) = N\left(P+(1-2)^{\frac{1}{2}}\right)$; sic series divergens, vel convergens sed infiniti va-

loris, quæ *Radicem* patefacere debeat imaginariam, ea semper erit, quam in plures resolvere queas convergentes et finiti valoris, quasque colligere vaIeas (saltem sat proxima vero) per N et P, una tantum excepta, cujus valor infinitus sit, sed contrahendus per definitam imaginariam functionem$(1-2)^{\frac{1}{2}}$. De serierum *Compositione* atque *Resolutione* egimus jam in ateactis Lectionibus. patet interim qui fiat, ut imaginariæ quoque radices in *totalem Summam* vero sat proximam adigantur tum etiam, quum immediate non patuerint per imaginarias α (par. 4.°): si nempe proposita æquatio (par. 2.°) fuisset $x^3 - ax - \phi = 0$, habereturque $\frac{\lambda^3}{27} < \frac{\phi^2}{4}$, quo in casu duæ radices x sunt imaginariæ; tunc radices α erutæ fuisaent reales, realesque proinde series S, S', S'' (par. 2.°, et 4.°); quare imagiuariarum radicum x valor penderet aba seriebus cogendis utique quandoque in convergentes, sed infiniti valoris (par. 10.°, et 15°).

Antequam Lectioni finem impono, animadvertam serierum valorem finitum aatius quam infinitum, non a sola terminorum magnitudine, sed ab istorum quoque signis pendere; est enim $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ ec. $= \infty$, aat vero $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ ec. $= L\,2$: sed seriei istius termini erant

bini colligendi in unum, ut seriei termini fierent singuli positivi, nempe $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+$ &c. $=L\,2$. Series autem convergentes proxima Lectione scrutandas terminis positivis singulis, vel singulis negativis (quod redit in idem), conflatas accipiam, quarum *Terminus generalis* notus sit, manu semper, ut in re nostra vidimus, et patientia reperiendus.

LECTIO II.

12.° Quaesitum nunc progrediamur *Convergentium* realium *Serierum totalem Summam*, vel hujus saltem valorem vero sat proximum; visuri simul an hic nempe finitus sit ideoque realis, vel infinitus proindeque imaginarius. Problema periclitamur ratiocinatione circumvolutum longa fortasse nimis, sed labora non multo ad exitum perducendum: in rem igitur vos animum intendite, me enim habebitis calculatorem patientia vestra non abusurum.

Differentia inter terminum seriei quemvis et proxime sibi sequentem, quam Seriei *Differentiam naturalem* voco, erit vel major, vel aequalis, vel minor termino ipso sequenti. Series hinc partior in Classes tres.

Classis I.

Si ubique seriei, vel tandem et deinceps, fiat *differentia naturalis* = *termino sequenti*, seriei valor erit semper finitus, ut patet per se, et ex serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ ec. $= 2$, quæ ab initio, et deinceps, offert ubique *Differentiam naturalem* $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ = *Termino sequenti* $\frac{1}{8}$.

Classis II.

Si fuerit *dif. nat.* > *term. seq.*, seriei valor erit eo magis (ut ita loquar) finitus: pro seriebus istiusmodi sufficiat nunc series $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} +$ ec. $= \frac{3}{2}$, quæ præbet ubique *dif. nat.* $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ > *term. seq.* $= \frac{1}{9}$. Animadvertite vero, acceptarum serierum (par. 11.°) *differentiam naturalem* fieri posse negativam nunquam.

Classis III.

Seriei valor infinitus esse nequit, nisi si fuerit tandem et deinceps *dif. nat.* < *term. seq.* Exemplum præbat series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ ec. $= \infty$, cujus est *dif. nat.* $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ = *term. seq.* $\frac{1}{2}$; sed deinde *dif. nat.* $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3}$ < *term. seq.* $\frac{1}{3}$; atque eo semper magis *dif. nat.* $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3.4} <$

term. seq. $\frac{1}{4}$, et ita porro. Sed series quoque $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+$ ec. $=1$, cujus videlicet valor finitus est, offert *dif. nat.* $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}=\frac{2}{2.3}>$ *term. seq* $\frac{1}{2.3}$; verum *dif. nat.* $\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3.4}=$ *term. seq.* $\frac{1}{3.4}$, atque tum postea *dif. nat.* $\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}=\frac{2}{3.4.5}<$ *term. seq.* $\frac{1}{4.5}$, sicque, et eo magis deinceps, ut de serie superiori contigit. In hac igitur Classe III. quærendus est *Limes*, qui seriarum valorem finitum dirimat ab infinito; limes videlicet, quem si series denique attigerit, de finito valore ruat in infinitum. Disquisitio hæc innititur præcipue fundamentali *Fractionum Continuarum* theoremate, quod vobis jam patefeci, et quo nunc utar.

Sit seriei *Terminus generalis* $\frac{n+1}{a^{n+1}}$ quem subsequuntur termini $\frac{n+2}{a^{n+2}}$, $\frac{n+3}{a^{n+3}}$, ec.; omissis semper numeratoribus, termini fierent $\frac{1}{a^{n+1}}$, $\frac{1}{a^{n+2}}$, $\frac{1}{a^{n+3}}$, ec., quorum habere-

tur *differentia naturalis* $\frac{a^{n+1}(a-1)}{a^{n+1}.a^{n+2}}$,

$\frac{a^{n+2}(a-1)}{a^{n+2}.a^{n+3}}$, ec.: ommissis iterum numeratoribus, *differentiæ* istiusmodi *naturalis* termini fierent $\frac{1}{a^{2n+3}}$, $\frac{1}{a^{2n+5}}$, ec.; hisce autem terminis, si *Fractionum Continuarum* theoriam consulamus, congruit (quod adjicio) nomen *Differentiæ minimæ*. Est igitur terminorum $\frac{n+1}{a^{n+1}}$, $\frac{n+2}{a^{n+2}}$ propositæ seriei proximorum sibi quorumvis *Differentia minima* $= \frac{1}{a^{n+1}.a^{n+2}}$,

quæ negotio nullo obtinetur. Hisce præmissis, tres sequentes Casus sunt in examen vocandi.

Casus I.

Si ubique seriei, vel tandem et deinceps, fuerit *dif. nat.* = *dif. minimæ*, seriei valor erit infinitus. Id ex *Continuarum Fractionum* theoria fluit, ut meæ vos prælectiones docuerunt: exemplum tamen sumere licet et juvat de serie $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \cdots\cdots + \frac{1}{a+n-1} + \text{ec.} = \infty$,

cujus terminus generalis est $\frac{1}{a+n-1}$. Series, pro valore a quovis, est ad Classem III.; præbet autem ubique *dif. nat.* $\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n} = \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} =$ *dif. minimæ* $\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$.

Patet vero hunc Casum I. series libentius excepturum, quarum sit *dif. nat.* $<$ *dif. min.*, cujusmodi foret, quæ terminum generalem habeat $\frac{1}{\sqrt{a+n-1}}$. Reliquus ergo videtur Casus, in quo sit *dif. nat.* $>$ *dif. min.*; sed hic, quoniam quæsitum *Limitem* patefacere debet, est bifariam partiendus. Habetur igitur.

Casus II.

Si fuerit *dif. nat.* $>$ *dif. min.*; tunc *differentiarum istarum Discrimen* erit ubique seriei constans et idem, vel majus deinceps, vel deinceps minus. Si *Differentiarum Discrimen* fuerit constans, vel deinceps minus; tunc seriei valor erit infinitus. Esset hic exemplis indulgendum; sed sequens Casus III. rei huic fidem faciet clariorem.

Casus III.

Si *differentiarum discrimen* crescat deinceps, valorem denique adipiscatur necesse est infinitum, vel non: vel nempe *Discrimen* fiet tandem infinitum; vel potius incrementis præterfluet augebiturque infinite parvis (sive finitis, sed quorum finita sit *summa totalis*), finitumque tantummodo valorem recipiet: si primum contigerit, seriei valor erit finitus et realis; secus non. Rem exemplo illustremus.

Accipiatur series $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} +$ ec.

$= -L\overline{1 - \frac{1}{a}}$, qui valor realis est et finitus pro $a > 1$, et ferme ad $a = 1$; statim enim et vix ac habeatur $a = 1$ (vel eo magis, $a < 1$), seriei valor fit infinitus, vel imaginarius, quod sonat idem. Præstat insuper animadvertere, seriem tum solum convergentem haberi, quum sit $a = 1$, vel $a > 1$; sed si fiat $a = 2$ series exulat de Casu III., quamobrem pro Classis III. hoc Casu III. accipienda erit quantitas $a > 1 < 2$. Est seriei *Terminus generalis* $\frac{1}{n a^n}$, habeturque *dif. nat.* — *dif. min.* = *difrum discrimini* $= a^n (na - n + a) - 1 > 0$. Si nunc dicatur $n = \infty$, et $a = 1$, *discriminis* valor fit $= 0$ (qui

valor censendus est finitus), et series transit in Casum I., cujus valor est infinitus. Si vero dicatur $a = 1 + \omega$, ubi est ω quantitas quantum fieri licet exigua; si nempe dicatur vix $a > 1$, tunc fit *dif. discr.* $(1 + \omega)^n (n\omega + 1 + \omega) - 1$, qui valor, si fingatur $n = \infty$, evadit infinitus, sed (ut ita dicam) vix quidem: seriei porro valor $L\,\overline{1 - \frac{1}{a}} = L\,\overline{1 - \frac{1}{1+\omega}}$ fit finitus (quamquam, ut ita loquar, vix quidem), et realis. Interim ergo dum a transit de $a = 1$ in $a = 1 + \omega > 1$, *differentiarum discriminis* valor labitur de 0, vel de finito in infinitum valorem; et ubi lapsus hic fit, ibi utique seriei propositæ valor remeat de valore infinito seu imaginario in finitum realemque. Sed per nulla incrementa infinite parva (de quibus sermo sat clarus fuit in Lectione de *Derivatis*); vel finita, sed quorum *totalis summa* finita sit; per nulla, inquam, istiusmodi incrementa *Differentiarum Discrimen* ruet unquam de valore 0, vel de finito quolibet alio, in valorem infinitum: neque ergo propositæ seriei valor revertetur unquam de infinito seu imaginario valore in valorem finitum et realem, nisi si *differentiarum discrimen* factum denique fuerit infinitum.

Videor ergo sequens consequutus Theorema.

Theorema

Si in Convergentis Seriei extremo saltem limine, ubi nempe fit $n=\infty$, *habeatur* Differentiarum Discrimen $=\infty$; *tunc Seriei valor erit finitus: erit autem valor Seriei infinitus* (*idest* Radicem *præseferet imaginariam*), *si fuerit ubique seriei* Differentiarum Discrimen $<\infty$. *Est ergo* Differentiarum Discrimen *quæsitus* Limes, *qui Convergentium Serierum finitum valorem dirimit ab infinito*.

Rem jacio, ut plane fatear, timoris adhuc plenam; quamque pluribus ab hinc mensibus ulterius perpendere prohibitus sum per valetudinem: verum labenti mihi in errorem venia, spero, dabitur eo libentius, quo citius typis hisce non mihi, sed Scholarium Lectiones has iterum propediem legendas auditurorum commodo cousuluerim quantum pro viribus licebat.

Sed ad hesternæ Lectionis Exempla (par. 10.°) revertamur.

Exemplum II.

13.° Æquatio $O=x^3-x+8=0$ sit in aliam traducenda, cujus coefficientes in series de-

ferant convergentes. Hæc tractata ut supra (par. 10.° et 14.°) præbet $x = z + 2$; proindeque $O' = z^2 + 3z + 10 = 0$: si igitur, ob $3 < 10$, dicatur $z = \frac{y}{\mu}$, prodibit $y^2 + 3\mu y + 10\mu^2 = 0$, de qua æquatione postulatur $3\mu > 1$, simulque $3\mu > 10\mu^2$; habendum nempe foret $\mu > \frac{1}{3} < \frac{3}{10}$, quod impossibile est, et innuit declaratque propositæ æquationis radices ad imaginariarum stirpem pertinere.

Demonstrationem hac super re silentio prætereo, contrahendam fortasse, sed nunc longam nimis, et quæ nec mihi est omnino satis.

Exemplum III.

14.° Æquatio symbolica $O = x^4 - ax^3 + 3bx^2 - 2cx + \phi = 0$ sit in aliam transformanda, quæ series exhibeat convergentes. Sit $a > 1 < 2$, $3b > \frac{3a}{4} < a$, $2c > \frac{a}{2} < a$, $\phi > a < 2a$, quos limites, vel alios hujusmodi negabit nemo, si seriei convergentia vel divergentia fuerit scrutanda; quosque insuper non ulterius coercendos accipiam, ut nempe Exemplum latius pateat et clarius. Est, ut te oculus monet, pe-

nultimi termini coefficiens $2c$ minor coefficientibus saltem a et φ, contra ac postulatur.

Ex visis (par. 10.°) habebitur $D' = 4x^3 - 3ax^2 + 6bx - 2c$, $D'' = 6x^2 - 3ax + 3b$, $D''' = 4x - a$, $D^{IV} = 1$. Obtinendum autem est $D''' = 4x - a > D^{IV} = 1$, idest $x > \frac{1+a}{4}$, quod utique consequeris, si dixeris $x = \frac{a+a}{4}$, est enim, ex concessis, $a > 1$. Quæratur nunc utrum pro $x = \frac{a+a}{4} = \frac{a}{2}$ fiat etiam $D'' = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} + 3b > D''' = 2a - a$, videlicet $3b > a$: id suppositi ab initio limites negant, negant ergo valorem $x = \frac{a}{2}$ satisfecisse. Dicatur igitur $x = \frac{2a+a}{4} = \frac{3a}{4}$, fietque $D'' = \frac{9a^2}{8} + 3b > D''' = 2a$: erit profecto $D'' > D'''$, si, suffecto limite minori $\frac{3a}{4}$ loco $3b > \frac{3a}{4}$, fuerit adhuc $D'' = \frac{9a^2}{8} + \frac{3a}{4} > D''' = 2a$, idest $a > \frac{10}{9}$: scimus utique haberi $a > 1 < 2$, ignoramus vero (vel potius petere nolumus) an

sit $a > \frac{10}{9}$; nescimus ergo an $x = \frac{3a}{4}$ satisfaciat. Dicatur igitur $x = \frac{3a + a}{4} = a$, et obtinebitur $D'' = 3a^2 + 3b > D''' = 3a$, suffectoque $\frac{3a}{4}$ pro $3b$, fiet $D'' = 3a^2 + \frac{3a}{4} > D''' = 3a$, nempe $a > \frac{3}{4}$, id quod suppositi limites patiuntur; quamobrem $x = a$ satis est ad proferendas derivatas $D'' > D''' > D^{IV}$. Quaeratur ergo denique, utrum $x = a$ praebeat $D' > D''$, nempe $D' = a^3 + 6ab - 2c > D'' = 3a^2 + 3b$: erit sane $D' > D''$, si, suffecto limite minori $\frac{3a}{4}$ loco $3b$ in termino positivo $6ab$, et limite majori a loco $2c < a$ in termino negativo $2c$; atque tum postea limite majori a loco $3b < a$ in termino positivo $3b$; fuerit adhuc $D' = a^3 + \frac{3a^2}{2} - a > D'' = 3a^2 + a$, videlicet $a^2 > \frac{3a}{2} + 2$, id quod accepti limites $a > 1 < 2$ vetant: concludes ergo valorem $x = a$ non sufficere. Si nunc fingas $x = \frac{5a}{4}$, et deinceps $x = \frac{6a}{4}$, $x = \frac{7a}{4}$, valores scrutaberis vel non sufficientes, vel incertos; donec acceperis

$x = \frac{8a}{4} = 2a$, qui, factis faciendis, exhibet $D' = 20a^2 > D'' = 15a + 2$, id quod limitibus atat sancitis $a > 1 < 2$. Igitur per $x = 2a$ exibis in $D' = 20a^3 + 12ab - ac > D'' = 18a^2 + 3b > D''' = 7a > D^{IV} = 1$, fietque $O = 8a^4 + 12a^2 b - 4ac + \varphi$. Si itaque dicatur $x = z + 2a$, originalis O transibit in $O' = D^{IV} z^4 + D''' z^3 + D'' z^2 + D' z + O = 0$, in qua explorandum remanet utrum sit $D' > O$: suffectis porro sufficiendis, incides in $17a^2 + 4a > 8a^3 + 3$, id quod limites $a > 1 < 2$ concedunt. Transformata igitur O' coefficientes habet desideratos (par. 8.°)

Anomaliis, Scholiisque referta est hæc Lectio sat multis, quibus ebstineo tacturus tantum præcipua, quæ porro, ut mihi in more positum est, Scholarium diligentiæ scrutanda relinquo.

Observatio I.

15.° Coefficientium $3b$, $2c$, ec. numeros 3, 2, ec. (istorumque dynastias) præstat stipitibus suis b, c, ec. adfixos collocare, secretos nempe a numeris cæteris, qui naturaliter in calculum labuntur (par. 4°, et 14.°) istorum enim sancita lex videtur, ne seriem diver-

genti pede ingrediantur: sic nempe videor demonstrasse; legem autem seorsim et alias promulgabo, neque enim ipsi mihi aat clara adhuc apparat.

Observatio II.

16.° Æquatio $x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 5x + 200 = 0$, cujus radices sunt singulæ imaginariæ, offert (par. 6.°) æquationem $\alpha^4 - 7\alpha^3 + 13\alpha^2 - 5\alpha = 0$, cujus radices sunt singulæ reales; sed hoc nec interest, neque nocet (par. 11.°).

Observatio III.

17.° Æquatio $x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$ ad paragraphum 10.° ex se ordinata, cujusque radices sunt singulæ reales; præbet æquationem $\alpha^3 - 7\alpha^2 + 13\alpha = 0$, cujus radices duæ sunt imaginariæ. Licet utique per $x = \frac{1}{z}$ scholium hoc superare, sed æquationem offendemus paragrapho 10.° non acceptam.

Observatio IV.

18.° Æquatio $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$ ad paragraphum 10.° accommodata, cujusque radices

singulæ reales sunt (duæ porro sunt sibi æquales), offert radices duas α imaginarias; neque has reddere reales valet antecedens artificium $x = \frac{1}{z}$. Hoc in casu radices α realium albo iterum adscribentur, si propositæ æquationis terminus tertius cogatur in negativum per $x = z - \frac{5}{3}$; ut patet ex anteactis Lectionibus.

Proposita æquatio per $x = \frac{1}{y} - \frac{5}{3}$ traducitur in $2y^3 + 9y^2 - 27 = 0$, de qua (par. 4.° et 6.°) obtinetur bis $\alpha = 0$, eliciunturque propositæ æquationis radices duæ æquales. Caveo porro id accipias pro Theoremate; æquatio enim quævis, quæ careat termino penultimo, vel quæ careat secundo et transformetur per $x = \frac{1}{y}$ ut penultimum desideret; æquatio, inquam, hujusmodi (omnis nempe et quæcumque æquatio) duas semper cogi posset æquales radices habere; id quod est impossibile.

Observatio V.

19.° Æquatio $x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0$, cujus radices singulæ cum reales, tum sibi æqua-

les sunt, prædictorum artificiorum nullo urgeri potest, ut proferat radices α reales, præter $\alpha = 0$. Verum sola hæc $\alpha = 0$ sufficit ad tres æquales x, videlicet ad alteram æqualium x exhibendam.

Methodus ergo quoque (par. 25.°) hæc mea ad eas etiam æquationes patet, quæ radicibus gaudent æqualibus (par. 18.°); id quod nec pro re nostra obliviscendum est; nec pretio nullo habendum.

Observatio VI.

20.° Iuvaret nunc ostendere imaginarias series fluendas de radicibus imaginariis α (par. 17.° 18.°, et 19.°) resolutas ire in apparenter tantum imaginarias (de quibus *Functionibus* habitæ Lectiones iterum iterumque verba fecerunt); vel in binas hujusce formæ $x = S' \pm S'' \sqrt{-1}$ (par. 4.°), sed cujus sit $S'' = N \sqrt{-1}$; ita videlicet ut propositæ æquationis radices abeant tandem in reales $x = S' \mp N$, a quibus exulare injuste cogebantur: sed hæc alterius temporis res erit.

21.° Theorematibus autem et Anomaliis de mea methodo scatentibus finis sit; *Symbolicæ* enim æquationes tractari tandem nequeunt, nisi in prope *Numericas* traducantur; quas

porro methodo omnium utique brevissima in lucem resolutas edidi anno 1811, sed iterum illustrare præstat, ut crastina vos, Scholares ornatissimi, Lectio docebit.

LECTIO III.

22.° *Symbolicis* æquationibus exactis, *Numericas* attingam iterum, ut clarius nempe Opusculum intelligatur meum Bononiæ typis datum Anno 1811; quod (ingenue fateor) nimia festinatione mea obscurum est factum; vel (si ita patiaris) tot est anomaliis refertum, ut fiat captu difficile ob errores præsertim irreptos dum typis dabatur, me ab urbe absente, quos pro Lectionum opportunitate attigisse sufficiat.

23.° Sit maximæ positivæ radicis æquationis $O = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$ *Limes numericus integer* quærendus. *Originalis O Derivatæ* (par. 10.°) habebuntur $D' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$, $D'' = 6x^2 - 12x + 4$, $D''' = 4x - 4$, $D^{IV}, = 1$, $D^{V} = 0$, ec. Radicum positivarum limitem scrutaberis frustra, si nullo negativo signo originalis O afficiatur. Abs derivatarum nunc ultima, quæ unica fruatur positiva radice (est hic loci $D''' = 4x - 4$) incipiendum est, quærendusque integer numerus, qui pro x suf-

fectus derivatæ valorem conferat in positivum: numerus $x = 2$ satisfacit, præbet enim $D''' = 4$; sed est et satis $x = 1$, profert enim $D''' = 0$, quare $x = 1$ est non Limes tantum, sed æquationis $4x - 4 = 0$ ipsa maxime positiva radix, cujus limes hic quærebatur, et est quærendus per ordinem in singulis derivatis antecedentibus, quæ nempe positivis radicibus fruuntur; quæ enim derivatæ positivis radicibus careant, neglectæ fuissent, quippe quæ positivum valorem recipiunt etiam de $x = 0$. Est nunc, aursum ascendendo (usque ad ipsam Originalem) quærendum, utrum limes 1 derivatas deinceps, originalemque redigat in positivum valorem. Si itaque dicatur $x = 1$, fit $D'' = -2$; quare limes 1 non sufficit, et est unitate augendus (et ita porro de unitate in unitatem): si ergo dicatur $x = 2$, habetur $D'' = 4$, et est 2 limes maximæ positivæ radicis æquationis $6x^2 - 12x + 4 = 0$ (nec non $4x - 4 = 0$). Dicatur nunc $x = 2$, fietque $D' = 0$; quamobrem est $x = 2$ maxima ipsa æquationis $D' = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$ positiva radix (nec non æquationum $6x^2 - 12x + 4$, et $4x - 4$ limes certus). Si denique dicatur $x = 2$, originalis abibit in $O = 1$; quare numerus 2 est maximæ etiam positivæ radicis æquationis $O = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$

Limes integer quæsitus, quem latius appellabo $\alpha = 2$. Patet sane limitem $x = \alpha = 2$ habendum fuisse originalis O radicem positivam maximam, si numerus 2 pro x suffectus redegisset originalem in $O = 0$.

Methodum hanc ratiocinatione probavi, et exemplis firmavi; brevissimam porro clarissimamque demonstrationem daturus, quum de *Curva uniformi* sermo fuerit.

Cum sit propositæ æquationis limes $\alpha = 2$ et integer, et vero vel proximus; habebitur illius maxima positiva realis radix (si qua porro realis sit) $x > 1 < 2$. Sed imaginariæ radices in causa plerumque sunt, quare maximæ positivæ radicis (utique realis) obtineatur limes justo major, sed corrigendus: limes justo minor habebitur nunquam, id quod anteactarum Lectionum fuit argumentum. Sed de his, aliisque anomalis typis dedi etiam plus satis (par 22.°).

Scrutemur nunc ipsius propositæ æquationis O radicis minimæ positivæ limitem, quo præcipue deinceps utemur. Est primo loco, et semper, æquatio O traducenda per $x = \frac{1}{\varphi}$ in $P = \varphi^4 + 4\varphi^2 - 4\varphi + 1 = 0$, ut quæsita radix minima x fiat maxima positiva φ in æquatione P. Quæratur nunc limes maximæ posi-

tivæ φ per ejus derivatam $D' = 4\varphi^3 + 8\varphi - 4$ (cæteris prætermissis, quæ terminis constant positivis singulis, positivisque proinde radicibus realibus carent). Si dicatur $\varphi = 1$, fiet $D' = 8$, habebiturque tum etiam originalis $P = 2$; quapropter limes quæsitus erit $\alpha' = 1$, eritque propterea radix positiva maxima realis (si qua sit) $\varphi > 0 < 1$, idest fracta. Iuvat porro ex solis *Fractis limitibus* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ec. proximos sibi duos (puta $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$) reperire, quos inter jaceat maxima positiva radix fracta φ (id quod anno 1811 me primum fecisse ignorabam; et obscuritati mihi tribuitur, quod nempe rem novam vix attigerim): si enim reperiatur $\varphi > \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, fiat necesse est radix minima positiva quæ primo quærebatur $x = \frac{1}{\varphi} > 2 < 3$, qui soli integri limites utique postulabantur. Dicendus ergo foret $\beta = 3$ minimæ positivæ radicis x limes integer quæsitus.

Fiat ergo de limite $\frac{1}{4}$ experimentum, habebiturque $D' = 4\varphi^3 + 8\varphi - 4 = \frac{-31}{16}$, quamobrem $\varphi = \frac{1}{4}$ non est satis ad reddendum valorem D' positivum: est igitur scrutandus

antecedens major limes $\varphi = \frac{1}{3}$, qui præbet $D' = \frac{-32}{27}$, quare neque $\varphi = \frac{1}{3}$ sufficit: quæratur ergo denique antecedens major $\varphi = \frac{1}{2}$ (dixi *denique*, scimus enim $\varphi = \frac{1}{1}$ satisfecisse), qui offert $D' = \frac{1}{2}$; quapropter $\varphi = \frac{1}{2}$ est satis. Ascendamus nunc ad originalem P, quæ per $\varphi = \frac{1}{2}$ dimensa abit in $P = \frac{1}{16}$ positivum valorem. Concludes ergo quæsitum limitem fractum esse $\alpha' = \frac{1}{2}$, haberique maximam positivam realem radicem (si qua realis sit) $\varphi > \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, ideoque minimam ab initio positivam quæsitam radicem x haberi $x = \frac{1}{\varphi} > 2 < 3$, fierique $\beta = 3$ minimæ positivæ radicis O limitem, quem generaliter dico β.

Verum, qui fieri potest, jure petes, ut ejusdem æquationis O radix positiva maxima fuerit $x > 1 < 2$, minima vero positiva evadat $x > 2 < 3$? id, repetam, imaginariarum radicum insolentia fit, quas porro in offitium compesce-

re licet, et publici juris est jam ab anno 1811 (par. 22.°).

24.° Quum itaque sit $\alpha = 2$ maximæ positivæ radicis æquationis $O = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$ limes integer (etsi fuerit etiam justo major); si dicatur $x = \frac{\alpha}{z} = \frac{2}{z}$, æquatio O traducetur in $O' = z^4 + 16z^2 - 32z + 16 = 0$, cujus radices positivæ, si quæ reales sint, haberi debent $z > 1$ singulæ: si enim foret exacte $z = 1$, originalis O per $x = \frac{2}{z} = 2$ facta fuisset $O = 0$, id quod (par. 23.°) contigit minime: si vero fieri posset $z < 1$, obtineretur $x = \frac{2}{z<1} > 2$, id quod falsum est (par. 23.°). Quotiescumque igitur æquationis O' maxima (vel quævis) positiva radix proferatur $z = 1$, vel $z < 1$; toties concludere licet, propositæ æquationis O radices positivas x esse singulas imaginarias. Cæterum de hisce x imaginariis singulis obtinetur etiam quandoque $z > 1$: si enim limes α ob radices imaginarias (par. 23.°) repertus fuerit justo major, tunc per justo majorem z est corrigendus; sed limes $z > 1$ in aliud te deferet scholium, quo clare monearis de positivarum imaginariarum radicum x præsentia

et numero. Sed hæc publici jam juris sunt (par. 22.°); neque non demonstratum reliqui, limitem videlicet positivæ maximæ radicis (tum etiam quum singulæ reales sint) aliunde quoque petitum (uti ex maximo negativo coefficiente, qui in hoc exemplo est -4, præbetque $\alpha = 4 + 1 = 5$), quamquam sæpe sæpius sit justo major plus satis; tamen inoffenso pede adhiberi posse æque ac repertus $\alpha = 2$. Sed ad rem nostram regrediamur.

25.° Si æquationis gradus cujusvis, puta $Q = x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, radices positivæ quotvis (quarum numerus abs signorum alternatione, uti vidimus, petendus est) reales non videantur solum, sed sint vel omnes, vel plures, vel una saltem (ut contingere probavi, si positivarum numerus impar sit), reperientur singulæ abs minima incipiendo sequenti modo. Maximæ radicis positivæ limes est nunc iterum $\alpha = 2$.

Dicatur ergo $x = \frac{2}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{u} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \text{ec.}$

cum *Fractio* hæc *Continua* præseferat radicem positivam x quamvis, cumque quæratur minima; patet sane hanc acrutandam esse per maximam positivam radicem z in æquatione trans-

formata per $x = \frac{1}{z}$; deinde per minimam radicem y in transformata per $z = a + \frac{1}{y}$ (ubi erit $a = 1$, vel numerus alius integer, pota 5, qui repertus fuerit pro maximæ radicis z limite, nempe pro $z > 5 < 4$, idest $z = 3 + \frac{1}{y}$); tum postea per maximam u in transformata per $y = b + \frac{1}{u}$ (ubi est de b dicendum, quod de a dictum est); et sic alternatim deinceps. (E contra vero, si quæsivisses ab initio maximam positivam radicem x, hanc repertum ivisses per minimam z, deinde per maximam y, et ita porro). Si ergo dicatur $x = \frac{1}{z}$, ut fiat $O' = 6z^4 - 20z^2 + 16 = 0$, quærato que limes maximæ radicis positivæ z, invenietur $z > 1 < 2$, idest $z = 1 + \frac{1}{y}$; quo valore, negotio plerumque nullo (ut vidimus par. 10.°) suffecto, æquatio O' abibit in $O'' = 2y^4 - 16y^3 + 16y^2 + 24y + 6 = y^4 - 8y^3 + 8y^2 + 12y + 3 = 0$, cujus est quærenda radix y positiva minima, quæ eruitur $y > 2 < 3$, idest $y = 2 + \frac{1}{u}$. Hoc valore pro more suffecto, æquatio O'' transit in $O''' =$

$11u^4 - 20u^3 - 16u^2 + 1 = 0$, in qua quærenda est radix u positiva maxima, quæ obtinetur $u > 2 < 3$, nempe $u = 2 + \frac{1}{t}$. Hoc valore suffecto, æquatio O^{III} traducitur in $O^{IV} = 47t^4 - 48t^3 - 128t^2 - 68t - 11 = 0$, quæ unica fruitur positiva radice nunquam in posterum defutura, nec iterum positivis aliis vel realibus vel imaginariis in posterum consocianda: sic enim Continuarum Fractionum theoria statutum est, ut præhabite Lectiones vos docuerunt. Hoc porro opus fere omne, hic labor est: hoc nempe solo paragrapho tota innititur *Numericarum Æquationum vero sat proxime resolvendarum Theoria*.

Minima foret nunc æquationis O^{IV} radix t perquirenda: sed abs minimæ radicis laboriosiori inquisitione in posterum abstineas licebit; radicemque t positivam maximam scrutaberis opere breviori; quæ enim positiva radix unica est, ipsa est et maxima et minima simul; obtineturque utraque via $t > 2 < 3$, idest $t = 2 + \frac{1}{r}$; quo valore suffecto, incides in $O^{V} = 291r^4 - 348r^3 - 712r^2 - 328r - 47 = 0$, cujus radix r positiva maxima est $r > 2 < 3$, idest $r = 2 + \frac{1}{s}$; et ita porro usque dum mi-

nus æ positivæ radicis x æquationis O limites placeat tibi coercere, ut notum est: sit autem quæsita jam ab initio radix minima positiva

$$x = \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{u + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{q}}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2} + ec.}}}} = \sqrt{2},$$

ut licet cuique periclitari.

In æquationes ergo tandem aliquando exibis, ut modo contigit, O^{IV}, O^{V}, ec, quæ unica fruantur positiva radice, quam nempe reperti limites ab aliis radicibus secernunt. Quum nempe sit quæsitæ minimæ positivæ valor

$$x = \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{u + \cfrac{1}{t}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{12}{17}$$

< valore justo; et valor

$$x = \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{u + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{r}}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{29}{41}$$

> valore justo, (ut notum est); patet sane unius, soliusque positivæ minimæ radicis x limitem minorem $\frac{12}{17}$ ipsam a negativis radicibus

secernere; et limitem majorem $\frac{29}{41}$ jacere inter ipsam et positivas ceteras x, si quæ aliæ fuerint reales; ita ut $s = \frac{29}{41}$ valor sit major radice positiva minima x, et minor positiva quavis alia: quamobrem si dixeris $x = \chi + \frac{29}{41}$, ut æquatio proposita $O = x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ exeat in æquationem $\Omega = \chi^4 - \frac{116}{41}\chi^3 - \frac{3359}{41^2}\chi^2 - \frac{380934}{41^3}\chi - \frac{52780658}{41^4} = 0$, hæc unica positiva gaudebit radice de duabus, quibus fruebatur æquatio O; hujus enim minima positiva radix x imminuta limite majori $\frac{29}{41}$ facta est negativa in Ω; sed hæc sola id passa est, limes enim $\frac{[illegible]}{41}$ est minor radicibus ceteris positivis x æquationis O, quæ ideirco in Ω permanent positivæ.

Remanet nunc quærenda radix positiva minima χ in æquatione Ω (vel potius maxima, est enim sola), et a ceteris realibus positivis secernenda (si quæ forent aliæ positivæ). Hac via reales positivas radices singulas et per ordinem repertas iri patet profecto; patetque ipsa-

rum limites, quamquam ab initio ignotos, ab initio ipso cohiberi, cohibitosque deinceps magis obtineri. Quare *Radicum realium vero sat proximarum Inventio* sita omnis in hoc est, ut per solum maximae positivae radicis x limitam $x=2$, caeteri ignoti limites, *Continuarum Fractionum* auxilio, pro singulis radicibus detegantur: positivis enim realibus detectis, notum est qui transitus sit ad negativas reales detegendas.

Fingamus fuisse m positivarum radicum aequationis O numerum a signorum alternationibus putatum: numerus positivarum aequationis Ω eodem modo quaesitus fiet $m-1$, si aequationis O radices positivae fuerint singulae reales. Si autem numerus m imaginarias quoque positivas radices amplectatur; tunc positivarum aequationis Ω radicum numerus habebitur $m-1$, vel $m-3$, vel $m-5$, ec.; imaginariae enim, quae positivae ab initio videbantur in O, subducunt se de aequatione Ω, vel de sequenti Ω', vel ec.; sed exulabunt vel binae, vel quaternae, vel ec., vel omnes simul (et etiam ab initio de Ω); vidimus enim illud esse imaginariarum irrequietum ingenium, ut modo positivae videri velint, modo negativae, quamquam neutrum sint. fidem porro sibi datam frangunt nunquam, ut binae nempe, vel quaternae, ec. semper sibi conoscientur.

Videre denique est in opusculo meo (par. 22.°) quanta quandoque cum elegantia reales radices quæ sibi æquales sunt, se simul sociasque prodent: has utique de medio anatulisse juvisset; sed in sensum de industria vocare placuit ut intelligaretur, methodum hanc meam ad æquales quoque radices patere.

Interim ergo dum reales radices æquationis *O* deteguntur singulæ, patet simul imaginariarum numerus: præterquam quod quæ reales non comparuerint, imaginariarum nomen ultro professas fuisse patet.

26.° Sed operæ pretium est, imaginarias quoque radices vero sat proximas reperire. Id porro obtinetur, si realium imaginariarumque simul radicum disquisitio in disquisitionem convertatur radicum tantummodo realium. Methodum id consequendi nec longam neque difficilem typis jam dedi (par. 22.°); aliam vero hanc viam aperire placet, quæ est illius corrollarium, et plerumque brevissima.

27.° Si quas imaginarias radices (vel omnes) æquatio quævis emplectatur, ipsarum forma erit $x = a \pm b\sqrt{-1}$, quibus binis conflatur *Trinomiale* semper reale $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$. Sic æquationis $A = x^4 - 1 = 0$ radices sunt $x = \sqrt{-1}, x = -\sqrt{-1}, x = 1, x = -1,$

quare ipsius factores lineares fiunt $x+\sqrt{-1}$, $x-\sqrt{-1}$, $x+1$, $x-1$, qui bini in se ducti utcumque trinomialia sex conficiunt, quorum quatuor imaginaria sunt, sed duo realia desiderabuntur numquam: tot videlicet aequatio A trinomialia proferet realia, et semper, quot saltem sufficiant ad suas reales imaginariasque simul radices proferendas. Si igitur dividatur A per generale trinomiale $B=x^2+\beta x+\gamma$, et per divisionis *Residuum* in nihilum reducendum secernantur indeterminati coefficientes β, γ; aequationes offendemus per β, et per γ, quarum intererit reales tantummodo radices perquirere; ut nempe trinomialia realia semper tot saltem detegantur, quot desideranda sunt, ut aequationis A radices pateant reales simul et imaginariae. Rem itaque conficiamus.

28.° Residuum divisionis de A per B habebimus $x(2\beta\gamma-\beta^3)+\gamma^2-\beta^2\gamma-1=0$, id quod verificari nequit, nisi si fuerit $E=2\beta\gamma-\beta^3=0$, simulque $F=\gamma^2-\beta^2\gamma-1=0$: aequatio E offert radicem $\beta=0$, quae sola radix (id quod interest observasse) in aequationem F suffecta, hanc cogit ad duas reales radices proferendas $\gamma=1$, $\gamma=-1$; quamobrem trinomialia quaesita sunt $B=x^2+1$, et $B=x^2-1$, qui quatuor aequationis A (par. 27.°) radices praebent.

Expuneta porro de E radice $\beta = 0$, radices cæteræ fiunt $\beta = \sqrt{2\gamma}$, $\beta = -\sqrt{2\gamma}$, quarum neutra in F suffecta radices γ producit reales. Nullum ergo aliud reale trinomiale B obtinebitur, sed quatuor cætera fient imaginaria, ut cæteras (par. 27.°) radicum binarum combinationes præseferant.

29.° De expectandarum æquationum per β, et per γ gradu, pro gradu diverso æquationis A, idem est dicendum quod fusius edidi (par. 22.°). Si nempe dicatur m gradus æquationis A, trinomialium cum imaginariorum tum realium simul numerus erit ad unguem et semper $\frac{m(m-1)}{2}$; qui idem erit gradus æquationis expectandæ per β, futurus porro quandoque minor. Hæc poterit quisque per *Inductionem* experiri.

30.° De æquationis A radicibus realibus singulis, vel plus duabus, trinomialia fluent realia plus satis. Hoc nempe Algebræ ingenium est, ut iis quoque det responsum, quæ neque somniaveras petiisse; id porro nec confusionem parit, nec in Algebræ vitium redit, sed in ubertatem; ut cuique paragraphos 28.°, et 29.° perpendenti patebit.

31.° Methodus ergo mea (solius paragraphi 28.° labore puniendo, si æquatio A cum

imaginariis radicibus societatem inivérit) in id unum contrahitur (par. 25.°), quod cæteræ methodi mihi notæ studioso Lectori faciendum ultimo loco relinquunt.

Opusculum meum (par. 22.°), Scholares ornatissimi, illud nunc intellecturi, attente pervolvite.

APPENDIX.

Cum per chartam saltem id liceat, nonnulla addere placet, quæ vel ad rem sunt, vel saltem non extra rem omnino.

Primum.

Æquatio quævis uniformis $y = x^m - ax^{m-1} + ax^{m-2} \ldots \pm \phi = A$ ad *Curvam* est, quam *Uniformem* voco. Punctorum in hac numerus m eminet, quæ *Geometrici loci* æquationis $A = o$ (quando nempe sit $y = o$.) nomen merentur. Punctorum m quæ sunt realia (realesque æquationis $A = o$ radices offerunt.) in *Axem* cadunt; imaginaria vero nullibi sunt, sed non omnino (licet enim per *Curvam uniformem* imaginarias quoque radices reperire).

Alia *Curva* hæc punctis gaudet, quibus

Maximorum vel *Minimorum* nomen inditum est. Habentur ferme semper, et plerunque plures, *Ordinatae* binae aequales $y = y'$ et distinctae, quarum nempe *Abscissae* non aequales sunt, puta x, et $x + \alpha$. Cum itaque sit $y = F.(x)$, et $y' = F.(x + \alpha)$; cum punctum *Maximum* vel *Minimum* ibi habeatur, ubi fiat inaequalium *Abscissarum* discrimen $\alpha = 0$; cum sit $F.(x+\alpha) - F.(x) = y' - y = 0 = D'$ (par. 10.°) ibi utique, ubi habeatur $\alpha = 0$; cum per solam constantis termini φ aequationis A alterationem *Axis Curvae* sibi parallelus de loco in locum quemvis transferatur; cum per hanc *Axis* translationem aequationis $A = 0$ radices binae in unam tandem congruant, vel ut clarius dicam, in duas aequales; cum denique *Geometricus* duarum istiusmodi aequalium radicum *locus* in *Axe* reperiatur, et simul cum puncto *Curvae Maximo* vel *Minimo*; patet profecto duarum aequalium radicum aequationis $A = 0$ alteram, sed unam tantum reperiri in D. Sed de his agere pro re, deque *Curvae* punctis caeteris $m - 2$, quibus *Flexuum* nomen convenit, et *Maximorum* iterum, iterumque sed diversae ab invicem indolis; longum esset, et plusquam opusculum hoc integrum ferre valuisset.

Illud porro nunc silentio non est praete-

reundum, *Derivatarum* nempe radices reales per ordinem (ut sic loquar) *interpolari*. *Derivatæ* videlicet L'^v radix realis unica, quæ *Maximum vel Minimum* unicum *Derivatæ* $D''' = 0$ punctum præbebit, jacebit inter duas reales radices æquationis $D''' = 0$, si hæ reales fuerint; poterit etenim $D''' = 0$ realibus carere omnino, realibus vero frui plus duabus non item. Et id satis sit ad paragraphum 23.° intelligendum.

Secundum.

Æquationis tertii gradus Solutionem meam typis datam Bononiæ An. 1809. arguit An. 1810. AnonymusG. F.: sed, bona cum venia sua, fallitur ipse. Negat, *exemp. gra.*, realis arcus a cujusvis *sinum* $z = \varphi >$ *radio* r impossibilem esse (idest lineam imaginariam); et me ad ipsum cogendum provocat in $m + n\sqrt{-1}$, quasi dicat non haberi, nec fieri $sin.\ z = tang\ z \cdot cos.\ z = tang\ z \cdot \sqrt{r^2 - \varphi^2} = \psi \sqrt{-1}$, ubi est ψ realis quantitas. Atque sic de cæteris. Ubi vero minusculæ cujusdam rei meæ novam ipse demonstrationem molitur, brevitate utique et ingenio multo nitentem; ibi demonstrationem meam, longam profecto, sed vitio nullo laborantem, festive ludit plus satis: quare ne nimium se jactet,

sciat Anonymus volo, graudia etiam mathematica *Inventa* (quibus nomen dedi certe nunquam) demonstrationibus novis elegantiora reddere, Mathematicis Viris quid esse fere commune.

Opuscula caetera mea a maledictis tunc vindicabo, cum typis data sint quae verbis circumferuntur, errores meos libenter professurus.

Tertium.

Sit *Functionis* completae $A = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + cx + d$ *Radix* quadrata $B = x^2 + ax + \phi$, quae *Residuum* dabit $C = \lambda(x^2 + \mu x + \rho)$, ubi λ, μ, ρ, constant *Coefficientibus* notis a, b, c, d, atque ignoto ϕ. Dicatur $\mu^2 = 4\rho$, ut *Trinomiale* $x^2 + \mu x + \rho$ fiat *Quadratum*; atque per tertii gradus *Æquationem* deteges ignotae rei ϕ valorem, ignotumque trinomiale C abibit in notum, puta $C = D = \sigma(x^2 + 2\omega x + \omega^2)$. Si igitur fuerit functio $A = 0$, quum sit $A = B^2 + D = 0$, fiet $B^2 = -D$, nempe $B = (x + \omega)\sqrt{-\sigma}$, quae est secundi gradus aequatio. Solutionem hanc, aequationis quarti gradus completae, vigintiquinque ab hinc annis Bononiae docebam.

BONONIAE TYPIS IOSEPHI LUCCHESINI.
MDCCCXV.

Errata	*Corrige*
Pag. 9 *Lin.* 19 *SS''*	*S''*
Pag. 38 *Lin.* 10 præhabite	præhabitæ
Pag. 39 *Lin.* 11 $\frac{12}{17}$	$\frac{24}{17}$ } *et sic*
Pag. 39 *Lin.* 13 $\frac{29}{41}$	$\frac{58}{41}$ } *infra*

Pag. 40 *Lin.* 7, *et* 8

$$\Omega = \chi^4 - \frac{116}{41}\chi^3 \text{—ec.}$$

$$\Omega = \chi^4 + \frac{232}{41}\chi^3 + \frac{11779}{41^2}\chi^2 - \frac{194512}{41^3}\chi - \frac{3318}{41^4} = 0$$

irrepta (pag. 39, et 40), *sic corrigenda, sunt ad exemplum non editum.*